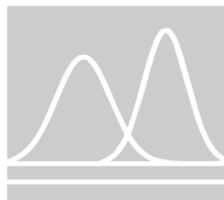
Ingeniantes

Metodología de Análisis Estrés-Resistencia Weibull



Colaboración
Manuel Baro Tijerina, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez; Margarita Sayuri Sáenz Rodríguez; Mauricio Solís Rodríguez, Instituto Tecnológico Superior de Nuevo Casas Grandes, Ciudad Nuevo Casas Grandes

RESUMEN: Cuando un producto está sometido a estrés variante debido a condiciones de uso o factores de ruido la confiabilidad de este producto o elemento $R(t)$ se da por la probabilidad de que la resistencia de dicho elemento o producto sea mayo que los niveles de estrés a los cuales se somete dicho producto, esto es, $R(t)=P(S>s)$. Por otra parte, cuando el comportamiento de la variable del estrés y de la resistencia son Weibull no existe una solución cerrada para el análisis estrés-resistencia cuando $\beta_1 \neq \beta_2$. Este articulo presenta un método para realizar el análisis estrés-resistencia Weibull cuando los parámetros de forma del estrés y de la resistencia sean diferentes, es decir, $\beta_1 \neq \beta_2$, basado en la relación Weibull - Gumbel se determina un valor β que representa eficientemente a el estrés y a la resistencia. Por último, se comprueba la eficiencia del método con una aplicación a un conjunto de datos presentados en una experimentación de la NASA.

PALABRAS CLAVE: Distribución de Weibull, distribución de Gumbel, confiabilidad, estrés, fuerza.

ABSTRACT: When a product is subjected to variant stress due to conditions of use or noise factors, the reliability of this product or element $R(t)$ is given by the probability that the resistance of the element or product are greater than the levels of stress which are subject the product or element, this is, $R(t)=P(S>s)$. On the other hand, when the behavior of the variable of stress and resistance are Weibull, there is no closed solution for the stress-strength analysis when $\beta_1 \neq \beta_2$. This article presents a method to perform the Weibull stress-strength analysis when the shape and stress parameters are different, that is, $\beta_1 \neq \beta_2$., based on the Weibull-Gumbel relationship, a β value is determined that efficiently represents stress and strength. Finally, the efficiency of the method is verified with an application to a set of data presented in a NASA experiment.

KEYWORDS: Weibull distribution, Gumbel distribution, Reliability, Stress, Strength.

INTRODUCCIÓN

En el análisis de la confiabilidad de un producto o elemento que esté sometido a estrés variante, se presenta una resistencia inherente a dicho estrés para soportar los valores de los estreses a los que se somete el producto. De esta manera la confiabilidad estará dada por la probabilidad de que la variable independiente de la resistencia sea mayo que la variable independiente del estrés, esto es, $R(t)=P(S>s)$,[1]. Cuando se presenta esta situación de valorar la variación de dos variables independientes con el fin de determinar su confiabilidad la herramienta que se debe empezar es el análisis estrés-resistencia [2]. Sin embargo, si la variable de ambos del estrés y la resistencia siguen un comportamiento Weibull, el análisis estrés-resistencia solo está definido cuando el parámetro de forma β sea igual en ambas variables, lo cual no ocurre debido al ambiente de uso del producto o elemento, a variables de ruido entre otros [3]. El hecho de que el análisis estrés-resistencia no pueda llevarse a cabo para el caso $(\boldsymbol{\beta_S \neq \beta_s})$ es debido a la falta de la propiedad de cerradura de a distribución Weibull la cual se presenta a continuación [4].

Para un conjunto de variables independientes Weibull $\mathbf{X{:}i \sim W(\eta i,\beta), i=1,\ldots,n,}$, digamos $\mathbf{X_1,\ldots X_n}$, entonces la probabilidad conjunta es:

$$\mathbf{P}(\min(\mathbf{X_1},\ldots,\mathbf{X_n}) > t)\mathbf{P}(\mathbf{X_1} > t,\ldots,\mathbf{x_n t})\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(\mathbf{X_i} > t) = \prod_{i=1}^{n}\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}\right] = \exp\left[-t^{\beta_i}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\eta_i^{\beta}}\right] = \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta *}\right)^{\beta_i} \text{ con } \eta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\eta_i^{\beta}}\right)^{-1/\beta_i}\right] \qquad \text{Ec. (1)}$$

Como puede observarse en la Ec. (1), la suma de variables Weibull solo es posible cuando las funciones poseen el mismo parámetro de forma β. Esto implica que la convolución Weibull no existe y por lo tanto tampoco existe solución cerdada para el análisis estrés - resistencia Weibull-Weibull [5].

La estructura de este artículo es como sigue: La sección 2 presenta las generalidades del análisis estrés-resistencia. En la sección 3 se muestran las generalidades de la distribución Weibull, así como su importancia. En la sección 4 se muestra una aplicación del modelo actual estrés-resistencia Weibull. La sección 5 presenta el método junto con una aplicación de este. Finalmente, en la sección 6 las conclusiones y las referencias son dadas en la sección 7.

Generalidades del análisis estrés-resistencia

En ocasiones la confiabilidad de los productos depende de la resistencia inherente del mismo, de modo que si el nivel de estrés al que el producto es sometido es mayor se presentara la falla del producto. Por tanto, si la variable aleatoria x representa el estrés y la variable aleatoria y la resistencia, en ese caso la confiabilidad del análisis estrés-resistencia esta dada por la probabilidad de $y>x$, es decir, $R(t)=P(y<x)$. En el análisis estrés-resistencia el término estrés se refiere a la carga que produce la falla y la resistencia refiere a la habilidad del componente o producto para soportar dicha carga. Debido a que ambos el estrés y la resistencia son variables aleatorias su comportamiento debe ser modelado por una distribución de probabilidad. De esta manera cuando las dos distribuciones se interpolan se produce una dispersión natural y cuando la variable del estrés se hace más grande que la variable de la resistencia se produce la falla. En otra forma, cuando la función de densidad de probabilidad de ambos el estrés y la resistencia son conocidos, la confiabilidad del componente puede ser determinada de forma analítica por medio de la intersección de las funciones de densidad (ver Fig. 1).

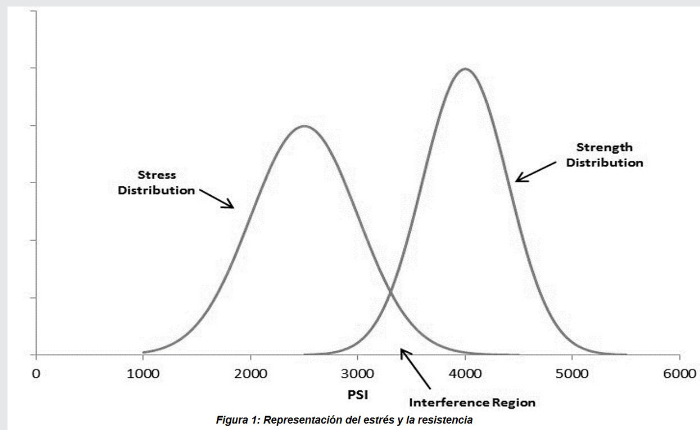


Figura 1: Representación del estrés y la resistencia

De esta forma siendo (x,y) variables aleatorias continuas que siguen una función de densidad conjunta (Pdf) $f(x,y)$. Entonces la confiabilidad del componente sujeto al estrés variante basado en $f(x,y)$ está dado como:

$$\boldsymbol{R = P(X < Y) = \iint_{-\infty}^{x} f(y,x)dx\,dy} \qquad \text{Ec. (2)}$$

Donde $P(x<y)$ es la probabilidad de que la resistencia exceda al estrés que se somete el componente y $f(x,y)$ es la función de densidad de probabilidad conjunta de la variable de la resistencia (y) y la variable del estrés (x) [6]. La siguiente ecuación es usada en el análisis estrés-resistencia para el cálculo de la probabilidad de falla.

$$\boldsymbol{F = P[s \geq S] = \int_0^{\infty} f_S(x) * R_s(x)dx} \qquad \text{Ec. (3)}$$

Y probabilidad de éxito en la confiabilidad esperada, $R(t)$ esta dada por:

$$\boldsymbol{R(t) = P[s \leq S] = \int_0^{\infty} f_s(x) * R_S(x)dx} \qquad \text{Ec. (4)}$$

Como puede observarse en la Ec.(4) el análisis estrés-resistencia está en el dominio positivo [7].

Generalidades De La Distribución WEIBULL

La distribución Weibull es utilizada en la ingeniería de confiabilidad y en el análisis de vida de productos, componentes, sistemas, etc., por su flexibilidad [1] ya que dependiendo del valor de los parámetros, la distribución Weibull puede ser utilizada para modelar una gran variedad de comportamientos de vida [8]. Otro aspecto importante de la distribución Weibull es como el valor del parámetro de forma $\boldsymbol{\beta}$ y el parámetro de escala $\boldsymbol{\beta}$, afecta las características de la distribución. El parámetro de forma de la distribución Weibull $\boldsymbol{\beta}$, es también llamado parámetro de pendiente, esto ya que el valor de $\boldsymbol{\beta}$ es igual a la línea de la pendiente en el grafico de probabilidad. Diferentes valores del parámetro de forma $\boldsymbol{\beta}$ tienen grandes efectos en el comportamiento de la distribución Weibull, de hecho, de acuerdo con los valores del parámetro de forma la distribución Weibull puede reducirse a otra distribución. En la Fig.(2) se muestra diferentes comportamientos de la distribución Weibull de acuerdo con el parámetro de forma $\boldsymbol{\beta}$.

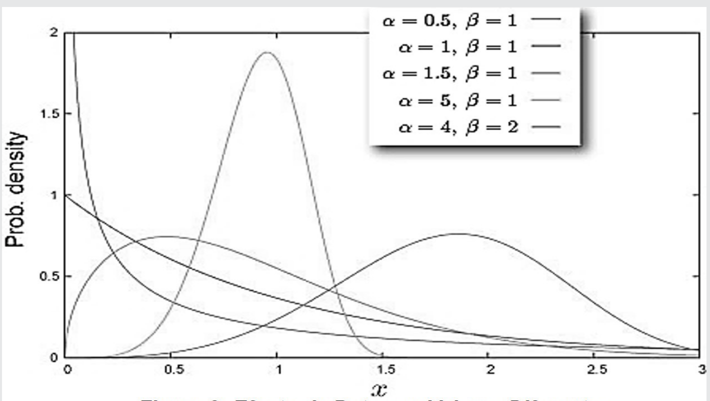


Figura 2: Efecto de Beta con Valores Diferentes

Figura 2: Efecto de Beta con Valores Diferentes

Modelo general estrés-resistencia Weibull

Establecer la resistencia en cuanto a confiabilidad de algún elemento o producto de su funcionalidad hasta que ocurra a primera falla. De esta forma si X sigue una distribución Weibull y Y se ajusta a una distribución Weibull ambas con $W \sim (\beta, \eta)$ con la función de densidad de probabilidad como:

$$f(x) = \beta\eta t^{\beta-1} e^{\eta t^{\beta}} \qquad \text{Ec. (5)}$$

El análisis estrés-resistencia Weibull puede realizarse cuando el parámetro de forma β sea igual en la distribución del estrés y en la distribución de la resistencia, es decir, $\beta_1=\beta_2$, aunque existen algunos casos propuestos en el análisis estrés-resistencia tales como: $2\beta_1=\beta_2$ o $\beta_1=2\beta_2$. Cuando se tienen parámetros de forma iguales se puede observar que el modelo estrés-resistencia Weibull-Weibull es el mismo modelo que el exponencial-exponencial, siempre y cuando se mantenga constante β_1 y β_2 [9]. La metodología para determinar la confiabilidad en el caso Weibull-Weibull se define como:

$$R = P(Y > X)$$

$$R(t) = \int_0^\infty f(x)\left[\int_t^\infty f(y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\beta}{\eta_x}\right)\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^{\beta}} \left[\int_t^\infty \left(\frac{\beta}{\eta_y}\right)\left(\frac{t}{\eta_y}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{y}{\eta}\right)^{\beta}} dy\right]$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\beta}{\eta_x}\right)\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^{\beta}} \left[e^{-\left(\frac{y}{\eta}\right)^{\beta}}\right] dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\beta}{\eta_y}\right)\left(\frac{t}{\eta_y}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^{\beta}+\left(\frac{x}{\eta_y}\right)^{\beta}} dx$$

Si

$$W = \left(\frac{x}{\eta_x}\right)^{\beta} \quad dw = \frac{\beta}{\eta_x}\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^{\beta-1} \quad x = \eta_x W^{1/\beta}$$

$$R = \int_0^\infty e^{-\left[W+\left(\frac{\eta_x W^{\frac{1}{\beta}}}{\eta_y}\right)^{\beta}\right]} dw$$

$$= \int_0^\infty e^{-\left[W\left(1+\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right)^{\beta}\right)\right]} dw$$

$$R(t) = \left.\frac{e^{-\left[W\left(1+\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right)^{\beta}\right)\right]}}{1+\frac{\eta_x^{\beta}}{\eta_y^{\beta}}}\right|_0^\infty$$

$$R(t) = \frac{1}{1+\frac{\eta_x^{\beta}}{\eta_y^{\beta}}} = \frac{1}{\frac{\eta_y^{\beta}+\eta_x^{\beta}}{\eta_y^{\beta}}}$$

Por lo tanto

$$R(t) = \frac{\eta_y^{\beta}}{\eta_y^{\beta}+\eta_x^{\beta}} \qquad \text{Ec. (6)}$$

Para ($\beta_S=\beta_s$)
En el caso de que los parámetros de forma β del estrés y de la resistencia sean diferentes, entonces la metodología estrés-resistencia está dada por:

$$R(t) = P(Y > X)$$

$$R(t) = \int_0^\infty f(x)\left[\int_x^\infty f(y)dy\right] = \int_0^\infty f(y)\left[\int_x^\infty f(x)dx\right]dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{\beta_y}{\eta_y}\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^{\beta_y-1} e^{-\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^{\beta_y}} \left[\int_0^y \frac{\beta_x}{\eta_x}\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^{\beta_x-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^{\beta_x}} dx\right]dy$$

$$R(t) = \int_0^\infty \frac{\beta_y}{\eta_y}\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^{\beta_y-1} e^{-\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^{\beta_y}} \left[1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta_x}\right)^{\beta_x}} dx\right]dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{\beta_y}{\eta_y}\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^{\beta_y-1} e^{-\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^{\beta_y}} - \int_0^y \frac{\beta_y}{\eta_y}\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^{\beta_y-1} e^{-\left[\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^{\beta_y} + \left(\frac{y}{\eta_x}\right)^{\beta_x}\right]}dy$$

Si

$$W = \left(\frac{y}{\eta_x}\right)^{\beta_x} \quad dW = \frac{\beta_y}{\eta_y}\left(\frac{y}{\eta_y}\right)^{\beta_y-1} \quad Y = \eta_y W^{1/\beta_y}$$

$$R(t) = 1 - \int_0^\infty e^{-\left[W + \left(\frac{\eta_y W^{\frac{1}{\beta_y}}}{\eta_x}\right)\right]}dW \qquad \text{Ec. (7)}$$

Para $(\beta_S=\beta_s)$

Como se observa en la Ec.(6) el análisis estrés-resistencia cuando $(\beta_S \neq \beta_s)$ no esta definido, dado que la suma de variables Weibull no resulta en una variable con distribución Weibull [10].

APLICACIÓN DEL ANÁLISIS ESTRÉS-RESISTENCIA WEIBULL

Se considera una experimentación presentada por Lawless (1982) y Proschan (1963). El primer conjunto de valores es el número de revoluciones antes de la falla de 23 baleros en una prueba de vida acelerada y el segundo conjunto de valores representa la distribución del estrés a los cuales se sometieron los baleros como se presenta a continuación:

Tabla 1. Experimentación Ballbearings.

Ballbearings (Rev. Falla)	Ballbearings (Estrés)	Ballbearings (Rev. Falla)	Ballbearings (Estrés)
17.88	100	68.44	40
28.92	95	68.64	35
33	90	68.88	30
41.52	85	84.12	25
42.12	80	93.12	20
45.6	75	98.64	15
48.8	70	105.12	10
51.84	65	105.84	10
51.96	60	127.92	10
54.12	55	128.04	10
55.56	50	173.4	10
67.8	45		

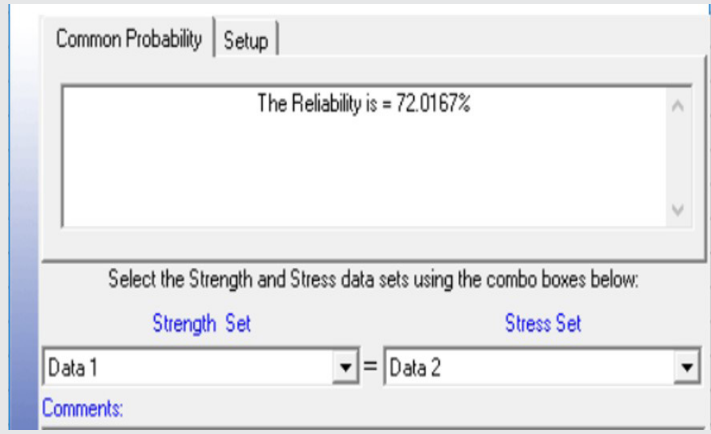


Figura 3: Confiabilidad de Ballbearings

RESULTADOS

Como puede observarse mediante el uso del software Weibull++ la confiabilidad para el análisis estrés-resistencia es de 72.0167, con una β y η de la resistencia de 2.25 y 80.75 respectivamente y los parámetros del estrés son iguales a 1.48 para el parámetro de forma β y 51.44 para la escala η. Como se presenta los parámetros de forma tanto del estrés y de la resistencia son diferentes por lo cual se realiza la integral infinita presentada en la Ec.(7).

CONCLUSIONES

En la ingeniería de confiabilidad la primera fuente de variación es la resistencia de un producto, elemento, sistema, etc., debido a que esta siempre será de tipo aleatorio. Por otra parte, la segunda fuente de variación es el estrés al cual se somete dicho elemento o producto, esto, por las condiciones de use que siempre serán diferentes a las condiciones en las cuales se prueban los productos, en parte debido a factores externos y por el uso del cliente, debido a esto, el análisis estrés-resistencia resulta ser eficiente en la estimación de la confiabilidad cuando un elemento o producto está sometido a estrés variante, sin embargo, como se observo en el caso de la distribución Weibull solo existe una solución cerrada cuando el parámetro de forma del estrés y de la resistencia sean iguales, en caso contrario, lo que pasa en la mayoría de las veces de a cuerdo al proceso estocástico que modela la distribución Weibull, la solución no tiene una forma cerrada, por lo cual el uso de software es empleado, pero es necesario realizar más investigación con el objeto de determinar la confiabilidad Weibull con parámetros de forma diferente de forma cerrada, es decir, generar la convolución de la distribución Weibull.

BIBLIOGRAFÍA

[1] M. R. Piña-Monarrez. (2018). Weibull Analysis for Constant and Variant Stress Behavior Using the Alt Method for Single Stress and the Taguchi

Method for Several Stress Variables. Quality and Reliability Engineering International, 229-244.

[2] B. A. P. Basu. (2008). Stress-Strength Model. Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability, 1-6.

[3] D. Kundu and R. D. Gupta. (2006) Estimation of P [Y < X] for Weibull Distribution. IEEE Transactions on Reliability, 270–280.

[4] C. E. Ebeling. (2010). An introduction to reliability and maintainability engineering, 2nd ed. Boston, 510-512.

[5] M. Nadar and F. Kizilaslan. (2016). Estimation of Reliability in Multicomponent Stress-Strength based On a Marshall-Olkin Bivariate Weibull Distribution," Ieee Transactions on Reliability, 261–267.

[6] Quanterion Solutions Incorporated. (2014). Interference Stress/Strength Analysis.Available: https://www.quanterion.com/interference-stressstrength-analysis/.

[7] D.-K. Huang and C.-F. Chen. (2011). Optical transmission inspection of the basis weight using the piecewise least squares method and quality capability of process. Optics Communications, 838–846.

[8] M. R. Piña-Monarrez, M. L. Ramos-Lopez, A. Alvarado-Iniesta, and R. D. Molina-Arredondo. (2016). Robust sample size for Weibull demonstration test plan. DYNA Colombia, 1-6.

[9] S. Babula and N. Sadananda. (2015). Reliability for solid-shaft under the weibull set up and stress strength model. Journal of Reliability and Statistical Studies, 11-17.

[10] G. J. Schlenker. (1986). Methods for Calculating the Probability Distribution of Sums of Independent Random Variables. AMSMX, 412-413.